Lernende lernen abduktiv: eine Methodologie kreativen Denkens

Michael H.G. Hoffmann

Es handelt sich hier um eine revidierte und wesentlich erweiterte Fassung eines Artikels, der unter dem gleichen Titel an folgender Stelle erschienen ist: *Abduktive Korrelation. Religionspädagogische Konzeption, Methodologie und Professionalität im interdisziplinären Dialog*. Hrsg. von Hans-Georg Ziebertz, Stefan Heil und Andreas Prokopf. Münster 2003: LIT Verlag, 125-136. Publikationsort der vorliegenden Fassung (November 2003):

http://www.uni-bielefeld.de/idm/personen/mhoffman/papers/03-MH-abduktiv-Lernen.pdf

Das von Charles S. Peirce (1839-1914) erstmalig entwickelte Konzept der „Abduktion" oder des „abduktiven Schließens" bezeichnet denjenigen Prozess, in dem ein Mensch angesichts einer als problematisch oder erklärungsbedürftig empfundenen Erfahrung eine erklärende Hypothese bildet. Es ist die darin enthaltene kreative Dimension, die den Begriff der Abduktion in vielen Bereichen interessant macht.

Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die mögliche Rolle abduktiven Schließens im Rahmen von Lernprozessen. Damit sind aber – sofern wir alle uns als Lernende begreifen – nicht nur die in der Schule lernenden Kinder und Jugendlichen Gegenstand der Überlegungen. Ich möchte in den ersten beiden Abschnitten mit einer Diskussion des Begriffs der Abduktion bei Peirce beginnen, wobei zunächst einige Probleme analysiert werden, die sich aus Peirces früher Definition dieses Begriffes ergeben, um dann im zweiten Abschnitt klarer zu sehen, wie sein reifer Begriff der Abduktion als ein zentraler Schritt in einer Methodologie wissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung gefasst wird. Im dritten Abschnitt möchte ich dann kurz die Möglichkeiten ausloten, welche dieses Konzept der Abduktion für das so genannte „Korrelationsproblem" in der Religionspädagogik bietet. Dabei soll insbesondere deutlich werden, dass auf der Ebene von Schülerinnen und Schülern, von Pädagogen und von Wissenschaftlern ganz unterschiedliche Anwendungsbereiche dieser Schlussform vorliegen. Um zu verstehen, wie eine methodologische Umsetzung abduktiven Schließens möglich ist, wird im vierten Abschnitt für eine Einbindung dieses Konzeptes in die Peircesche Konzeption „diagrammatischen Denkens" argumentiert, das auf der Grundthese seiner Semiotik basiert, dass „alles Denken in Zeichen geschieht". Wie man sich diese Umsetzung praktisch vorstellen kann, soll dann an einem einfachen Beispiel aus dem Bereich des Mathematiklernens vorgeführt werden, das schließlich im sechsten Abschnitt methodologisch reflektiert. Es wird für die These argumentiert, dass die Möglichkeit abduktiven Schließens ganz entscheidend davon abhängt, dass

Lernende lernen mit Zeichen und Repräsentationen in geeigneter Weise umzugehen. Ich würde behaupten, dass die Kreativität der Abduktion vor allem in solchen Prozessen der Diagrammatisierung zum Tragen kommt.

Diese zuletzt genannten Überlegungen führen ein Stück weit in die Peircesche *Semiotik*, die Lehre von den Zeichen. Ihre Nützlichkeit liegt meines Erachtens darin, dass im Rekurs auf die semiotische Theoriebildung unter Umständen präziser gefasst werden kann, was Ziebertz, Heil und Prokopf in ihren Beiträgen in Bezug auf religiöse Zeichen und Semantiken sowie zur Rolle von Zeichen für die Bewältigung lebenspraktischer Probleme ausgeführt haben.

1. Probleme mit Peirces frühem Begriff der Abduktion

In den zahlreichen Wissenschaften, in denen der Peircesche Begriff der Abduktion auf Interesse gestoßen ist – Philosophie, Wissenschaftstheorie, Künstliche-Intelligenz-Forschung, Sozialwissenschaften, Literaturwissenschaften, Rechtswissenschaft und Kriminalistik sowie pädagogische und didaktische Wissenschaften –, ist dieses Interesse darin begründet, dass mit diesem Begriff die Entstehung von „Neuem“, die Entwicklung „neuer“ Ideen und Hypothesen beschrieben werden kann. Abduktion ist für Peirce „die einzige logische Operation, die irgendeine neue Idee einführt“ (Peirce VP 115 = Peirce CP 5.171; vgl. ebd. 5.145).

Die Entwicklung eines so grundlegenden Konzeptes ist jedoch auch bei Peirce nicht an einem Tag geschehen. Man muss vielmehr sagen, dass er über etliche Jahrzehnte hinweg daran gearbeitet hat, diesen Begriff der Abduktion und die mit ihm auftauchenden Probleme weiter zu klären (vgl. Fann 1970, Santaella 2000). Das bedeutet, dass wir es nicht einmal bei Peirce mit einem einheitlichen Konzept zu tun haben, sondern mit ganz verschiedenen, je nach Kontext und dem Entwicklungsstand seines Denkens.

Eine ganz zentrale Akzentverschiebung dieser Entwicklung kann darin gesehen werden, dass der frühe Begriff der Abduktion – wie schon die sprachlichen Anklänge an „Deduktion“ und „Induktion“ deutlich machen – als eine *logische Schlussform* konzipiert war, während in späteren Texten Abduktion mehr die Rolle einer *Methode* oder eines bestimmten Schrittes in einer Methodologie von Forschungsprozessen spielt. Dabei kann man vermuten, dass diese Entwicklung von Peirces Denken im Zusammenhang steht mit einem bestimmten Problem, das sich für ein schlusslogisches Verständnis der Abduktion stellt: das Problem der Abgrenzung von Induktion und Abduktion. Ich möchte das an Peirces 1878 vorgenommener Unterscheidung von Deduktion, Induktion und „Hypothese“ deutlich machen, wie er seine dritte Schlussform der Abduktion in diesem frühen Text nennt. Es handelt sich um das berühmte „Bohnenbeispiel“, das in der Sekundärliteratur oftmals als die zentrale und einzige Definition von Abduktion genommen wird. Peirce geht davon aus, jemand habe einen Sack Bohnen vor sich und in der Hand ebenfalls Bohnen:

„DEDUKTION

Regel. — Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.

Fall. — Diese Bohnen sind aus diesem Sack.

∴ *Resultat.* — Diese Bohnen sind weiß.

INDUKTION

Fall. — Diese Bohnen sind aus diesem Sack.

Resultat. — Diese Bohnen sind weiß.

∴ *Regel.* — Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.

HYPOTHESE (= Abduktion)

Regel. — Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.

Resultat. — Diese Bohnen sind weiß.

∴ *Fall*. — Diese Bohnen sind aus diesem Sack.“ (Peirce PRAG 232 = CP 2.623)

Es ist in der Tat in der traditionellen syllogistischen Logik üblich, in Bezug auf die Deduktion drei Sätze zu unterscheiden: zwei Prämissen, von denen eine ein Allsatz ist (oder ein negierter Allsatz wie „keine Bohne aus diesem Sack ist weiß“), und eine Konklusion. Bei der Induktion, die wie die Deduktion schon bei Aristoteles voll entwickelt vorliegt, ist der Ausgang von drei Sätzen aber keineswegs üblich und auch nicht notwendig: Die Induktion ist traditionell ein Schluss vom Besonderen auf etwas Allgemeines. Folgender Schluss – der zugleich das mit der Induktion notwendig verbundene *Problem* solchen Schließens deutlich macht – kann als Paradebeispiel für induktives Schließen gelten:

Prämisse: Jeder Rabe, den ich bisher gesehen habe, war schwarz.

Konklusion: Alle Raben sind schwarz.

Man sieht leicht, dass der Schluss sofort falsch wird, wenn plötzlich einmal ein nicht-schwarzer Rabe auftaucht. In Bezug auf Peirces Definition fällt sofort auf, dass seine Unterscheidung von „Fall“ und „Resultat“ überhaupt nicht einleuchtet. Ohne die logische Überzeugungskraft (soweit wir eine solche überhaupt zugestehen wollen) in irgendeiner Form zu tangieren, können wir auch folgendermaßen schließen:

Prämisse: Diese Bohnen sind aus diesem Sack und sie sind weiß.

Konklusion: Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß.

Die Peircesche Unterscheidung von „Fall“ und „Resultat“ ist hier logisch irrelevant. Gleiches gilt auch für die Unterscheidung von „Regel“ und „Resultat“ bei dem von Peirce als „Hypothese“ bezeichneten Schluss. Ohne die Validität des Schlusses in irgendeiner Weise zu verändern können wir hier auch sagen:

Prämisse: Alle Bohnen aus diesem Sack sind weiß und diese Bohnen in meiner Hand sind ebenfalls weiß.

Konklusion: Diese Bohnen sind aus diesem Sack.

Wie gesagt, weder die vorgeschlagene Umformung dessen, was Peirce „Induktion“ nennt noch die seiner „Hypothese“ verändert die Gültigkeit dieser beiden Schlüsse. Was man nun aber bei diesen Umformungen sofort sieht ist, dass beide Schlüsse hinsichtlich ihres logischen Aufbaus weitgehend *identisch* sind: Beides Mal wird eine Hypothese gebildet, eine Vermutung, die genauso fallibel ist, wie wir dies schon beim Schluss auf „Alle Raben sind schwarz“ gesehen haben. Der einzige Unterschied ist, dass der Inhalt der jeweiligen Hypothese ein anderer ist, und dass die Wahrheitswahrscheinlichkeit eine andere ist: Während wir bei der Peirceschen „Induktion“ die Wahrscheinlichkeit der Wahrheit der Konklusion quantitativ bestimmen können, ist dies bei der „Hypothese“ nicht möglich. Aber diese Unterschiede sind für die *logische Form* dieser beiden Schlüsse vollkommen irrelevant. Logik abstrahiert *per definitionem* von den Inhalten gewählter Sätze und hat es allein mit der *Form* ihres Zusammenhangs zu tun.

Auf diese Weise kann man nur festhalten, dass Peirces frühe Unterscheidung von Deduktion, Induktion und Hypothese unzureichend ist. Und genau dies hat er wohl selbst gesehen, wobei – wie aus folgendem Brief oder Briefentwurf hervorgeht – offenbar mehr als nur eine Änderung seiner Sicht des Verhältnisses von Induktion und Abduktion zu verzeichnen ist:

“In various publications, I gradually made my doctrine more definite, until in 1883 I gave an account of it in *Studies in Logic by Members of the Johns Hopkins University*. The theory there given seems to me substantially correct as far as Induction goes. Later, I was led to see objections to the method in which I there dealt with Hypothesis, in regard to which I had departed from my earlier opinions; and in order to meet these objections, I at first proposed slightly to modify my theory both of Induction and of Hypothesis, leaving my later opinions about their relations to one another, as they were. But this new view on further consideration was found not to be acceptable in regard to Induction; and finally some five years ago I made an entirely fresh investigation, more careful than ever, the result of which was that I return to my early views of the relations of induction and hypothesis, leave the theory of induction as I had it in 1883 substantially, and restrict the modifications of it to hypothesis only.” (Peirce L 409 = ISP 73, 1901; vgl. auch CP 2.102, 1902, Peirce HLP 282, 1903, und CP 8.227, 1910)

2. Abduktion als Forschungsmethode

Ich will hier nicht versuchen im Einzelnen nachzuzeichnen, wie genau Peirce in der Vielzahl der genannten Entwicklungsschritte jeweils Induktion und Abduktion definiert hat. Die entscheidende Änderung, die etwa ab 1900 einsetzte (vgl. Fann 1970, Santaella 2000), kann darin gesehen werden, dass Peirce die drei für ihn grundlegenden Schlussweisen nicht mehr primär im Hinblick auf ihre *logische Form* unterscheidet, sondern hinsichtlich ihrer *Funktion im Forschungsprozess*. Das wird ganz deutlich in folgender späteren Formulierung von 1905, die knapp zusammenfasst, was er bereits 1901 ausführlicher beschrieben hatte:

„Es gibt nicht mehr als drei elementare Arten des Denkens (oder des Schließens: *reasoning*). Die erste, welche ich Abduktion nenne ..., besteht in der Untersuchung einer Masse von Fakten und darin, diesen Fakten zu erlauben, eine Theorie nahe zu legen. Auf diese Weise gewinnen wir neue Ideen; aber es gibt keinen Zwang in diesem Schließen. Die zweite Art des Schließens ist Deduktion oder notwendiges Schließen. ... Der dritte Weg des Schließens ist Induktion oder experimentelle Forschung. Ihr Vorgehen ist dieses: Nachdem Abduktion eine Theorie nahe gelegt hat, setzen wir die Deduktion ein, um von dieser idealen Theorie eine wahllose Vielfalt von Konsequenzen mit dem Ziel abzuleiten, dass wenn wir bestimmte Handlungen durchführen, wir uns mit bestimmten Erfahrungen konfrontiert sehen. Wir gehen dann daran, diese Experimente durchzuführen, und wenn die Voraussagen der Theorien verifiziert sind, haben wir ein verhältnismäßiges Vertrauen, dass die Experimente, die noch durchzuführen bleiben, die Theorie bestätigen werden. Ich sage, dass diese drei die einzigen elementaren Formen des Denkens sind, die es gibt.“ (Peirce 1905, ca., CP 8.209; vgl. CP 7.202-207, 1901, und dazu Fann 1970, 31 ff.)

An dieser späteren Sichtweise sind zwei Dinge bemerkenswert: zum einen die klare Abgrenzung von Induktion und Abduktion dadurch, dass die eine Schlussform den *Anfang* des hier entfalteten Dreischritts von Forschungsprozessen bildet während die andere, die Induktion, am Ende steht – worauf gleich genauer einzugehen ist –, und zum anderen die Behauptung, dass Abduktion, Deduktion und Induktion „die einzigen elementaren Formen des Denkens“ oder Schließens seien, die es gibt. Das bedeutet umgekehrt, dass wir nach Peirce *alle* möglichen Formen von „Denken“ oder von geistiger Aktivität einer dieser drei Schlussformen zuordnen können müssen, und das wiederum bedeutet, dass diese nicht nur auf wissenschaftliche Tätigkeit oder sonstige spezielle Aktivitäten zu beschränken sind, sondern vielmehr *ständig* vorkommen und unser Leben durchgängig bestimmen. Und in der Tat vertritt Peirce die These, dass wir *alles* Wissen durch Schlüsse gewinnen (vgl. PRAG 13-87 = CP 5.213-317). In diesem Sinne interpretiert er auch die Wahrnehmung als einen, wenn auch meist unbewusst ablaufenden abduktiven Schluss (CP 5.181 ff.).

Um das besser verstehen zu können, muss man sich die spätere Definition von Abduktion im Unterschied zur Induktion vor Augen halten, wie er im obigen Zitat schon angedeutet wird: *Abduktion* ist für Peirce der Schluss von Fakten auf eine diese erklärende Hypothese, während *Induktion* allein als der Prozess der Bestätigung von Hypothesen durch Fakten definiert wird (vgl. auch CP 7.218, 1901). Abduktion ist der Weg vom Einzelnen zum Allgemeinen, von überraschenden Tatsachen zu erklärenden Ideen oder Theorien, Induktion der Weg vom Allgemeinen zu Fakten, um eine Basis für die Wahrscheinlichkeit dieser Ideen und Theorien zu gewinnen. Für den späteren Peirce besteht das Problem der Induktion nicht darin, *was* aus einer Reihe von Daten als deren allgemeine Struktur erschlossen werden kann – wie wir gewöhnlich Induktion verstehen –, sondern die Frage ist allein die quantitative Bestimmung dessen, was uns bereits durch eine Abduktion gegeben ist. Wir haben es also mit einem Begriff von „Induktion als Bestätigung" zu tun, wie bei Hempel (vgl. Goodman 1983 <1954>, 67).

Die eigentliche Leistung von Peirce kann darin gesehen werden, dass er mit der so gefassten Unterscheidung von Abduktion und Induktion deutlich gemacht hat, dass das klassische Problem der Induktion – dass der Schluss vom Besonderen zum Allgemeinen nicht gerechtfertigt werden kann – im Grunde *zwei* Probleme enthält: zum einen das Problem der *Entstehung* und Formulierung von geeigneten Hypothesen, und zum anderen das Problem der Stärkung oder Schwächung solcher Hypothesen. Und gleichzeitig bietet er mit der methodologischen *Verbindung* von Abduktion, Deduktion und Induktion bereits eine Lösung dieser beiden Probleme an: Anstatt eine Möglichkeit der Rechtfertigung dieser Schlussformen je für sich zu versuchen, macht er deutlich, dass das Rechtfertigungsproblem *genetisch* aufzulösen ist, das heißt dann, wenn man den Erwerb von Wissen und die Entwicklung von Erkenntnis von vornherein als einen auf *Selbstkorrektur* angelegten *Prozess* begreift.

Peirces reifer Begriff „abduktiven" Denkens oder Schließens kann also zusammenfassend folgendermaßen definiert werden: Abduktion ist der *Prozess der Bildung von Hypothesen* in Anbetracht von erklärungsbedürftigen Tatsachen (vgl. auch Hoffmann 1999). Ihr Anwendungsbereich beginnt bei der *Wahrnehmung*, wo nach Peirce das Wahrzunehmende die „erklärungsbedürftige Tatsache" wäre, die dadurch erst wahrgenommen wird, dass sie unter eine bereits gegebene Vorstellung oder einen Begriff subsumiert wird; ich kann erst „sehen", dass dies ein „Stuhl" ist, wenn ich erstens schon über den Begriff des Stuhles verfüge und ich zweitens in der Lage bin, eine neuronale Reizung mit diesem Begriff zu interpretieren. Abduktion spielt überall da eine Rolle, wo es um *Interpretation* geht, das heißt überall da, wo entweder Beobachtungen unter bereits gegebene allgemeine Vorstellungen subsumiert oder aber „neue" Interpretationsmöglichkeiten generiert werden. In diesem Sinne ist Abduktion ein wesentlicher Bestandteil von Kommunikation, insofern die Äußerungen von Gesprächspartnern genauso interpretiert werden müssen, wie ein wahrgenommener Gegenstand oder ein zu lesender Text. Und Abduktion ist natürlich ganz wesentlich bei der Bildung ganz neuer Hypothesen, wie sie nicht nur für wissenschaftliche „Entdeckungen" charakteristisch sind, sondern auch für alltägliche Lernprozesse, wo „das Neue" das für den jeweiligen Lernenden Neue ist.

Diese Breite des Anwendungsbereiches von Abduktion sorgt dafür, dass es sich um ein alltägliches Phänomen handelt. Wir brauchen uns nur zu vergegenwärtigen, wie wir lesen gelernt haben, und dass es uns in der Tat eine eigenständige Anstrengung bedeutet hat, von der Identifikation einzelner Buchstaben auf ein *Wort* mit einer bestimmten Sprechweise und Bedeutung zu kommen. Wenn wir vermuten, dass wir hierbei eine Reihe von Fakten – einige jeweils einzeln erkannte Buchstaben – unter eine bereits gegebene Vorstellung eines bestimmten Wortes subsumieren, so dass alles Lesen letztlich Raten ist, dann können wir von einer Kontinuität abduktiven Schließens von diesen einfachen Fällen bis hin zu wissenschaftlichen Entdeckungen ausgehen. Denn Kepler – um Peirces berühmtes Beispiel für wissenschaftliche Abduktion anzuführen (vgl. Richter 1995, 83-93) – hat im Grunde nichts anderes getan, als er die Messdaten von Tycho Brahe zu den Mars-Positionen durch die Annahme erklärte, dass dieser sich in der Form einer Ellipse um die Sonne bewegt. Denn die Form der Ellipse hat er schon aus der Geometrie der Kegelschnitte gekannt. Seine eigentliche Leistung bestand eher darin, dass er diese geometrische Form zur Erklärung Planetenbahn herangezogen hat, und dass er diese erklärende Hypothese *im Gegensatz* zur vorherrschenden antiken und mittelalterlichen Vorstellung vertreten hat, nach der allein die Kreisbewegung – als die „vollkommenste" Bewegung – die Planetenbahnen beschreiben kann. Die „neue" Hypothese verdankt sich nicht einer *creatio ex nihilo*, sondern sie ist allein „neu" im Sinne einer originellen Verbindung von bereits gegebenen, aber bislang unverbunden nebeneinander existierenden Wissensbeständen – beobachtete Mars-Positionen einerseits und die Geometrie der Kegelschnitte andererseits.

So gesehen gibt es kein menschliches Denken und Lernen ohne Abduktion. Angefangen von der Wahrnehmung, wo die abduktive Subsumtion von äußeren Reizen unter gegebene Vorstellungen und Begriffe nach Peirce ganz unbewusst abläuft, über die Interpretation von Äußerungen bis hin zur ganz bewussten Suche nach geeigneten Ideen, Begriffen, allgemeinen Repräsentationen und Theorien, durch die wir Erklärungsbedürftiges zunächst hypothetisch erklären können, begegnet uns Abduktion überall. Mit dem Begriff der Abduktion kann das eigentlich kreative Element von Lern- und Forschungsprozessen beschrieben werden.

Ich möchte diese Überlegungen abschließen mit einer Bemerkung zum „logischen" Charakter der Abduktion, den Peirce in dem schon zitierten Satz behauptet, dass diese „die einzige *logische* Operation" sei, „die irgendeine neue Idee einführt" (Peirce VP 115 = Peirce CP 5.171). Das kann allein auf die wiederum an den klassischen Syllogismus angelehnte *Form* bezogen werden, in der nach Peirce Prämissen und Konklusion des abduktiven Schlusses zu bringen sind, keineswegs aber auf die „Gültigkeit" dieser Form des „Denkens", wie man vielleicht vorsichtiger statt „Schließen" sagen sollte. Das macht Peirce selbst in Bezug auf seine zweite, sehr bekannte Definition von Abduktion in der Pragmatismus-Vorlesung von 1903 deutlich:

(P1) „Die überraschende Tatsache *C* wird beobachtet;

(P2) aber wenn *A* wahr wäre, würde *C* eine Selbstverständlichkeit sein;

(K) folglich besteht Grund zu vermuten, daß *A* wahr ist.“ (VP 129 = CP 5.189)

Wie Peirce selbst im Anschluss daran völlig richtig festhält, kann *A* in der Konklusion (K) erst dann „abduktiv gefolgert werden, ... wenn sein ganzer Inhalt in der Prämisse“ (P2) bereits „vollständig gegenwärtig ist“. Das heißt aber, für die *Logik* der Abduktion ist bereits vorausgesetzt, dass wir schon über eine erklärende Hypothese *A* verfügen. Wie wir aber zu dieser Hypothese kommen, bleibt an dieser Stelle offen, oder anders gesagt: Der eigentlich kreative Akt, eine Hypothese für eine erklärungsbedürftige Tatsache zu *finden*, ist ein Prozess, der mit Logik zunächst nichts zu tun hat.

3. Abduktion in der Religionspädagogik

Wir hatten Abduktion definiert als den Prozess der Bildung von Hypothesen in Anbetracht von erklärungsbedürftigen Tatsachen. Das bedeutet aber zunächst einmal, dass Abduktion immer nur dann eine Rolle spielt, wenn jemand tatsächlich mit Problemen konfrontiert ist, die eine Erklärung verlangen. Will man deshalb den Begriff der Abduktion auf das in diesem Band diskutierte „Korrelationsproblem“ der Religionspädagogik anwenden, wird man zunächst klären müssen, mit welchen Arten von Problemen man es in diesem Kontext zu tun hat. Mir scheint an dieser Stelle wesentlich zu sein, dass man in Bezug auf das Korrelationsproblem die Ebenen des Lernenden, des Lehrenden und des wissenschaftlich Arbeitenden unterscheidet. Denn wenn man einmal davon absieht, dass wir alle unsere Wahrnehmungen und die Äußerungen von Gesprächspartnern immer „abduktiv“ interpretieren, wird man doch sagen können, dass man es auf jeder dieser drei Ebenen mit ganz unterschiedlichen Problemlagen zu tun hat, so dass auch die abduktiven Schlüsse, welche die Betroffenen zur Klärung dieser Probleme vollziehen, ganz unterschiedlich sein werden.

So scheint auf der Hand zu liegen, dass sich gerade das Korrelationsproblem für Schülerinnen und Schüler auf der einen Seite und für Lehrende und Wissenschaftler auf der anderen ganz verschieden darstellt. Wenn man, wie Prokopf und Ziebertz (2000) vorschlagen, das Problem der Korrelation als Problem einer „Wechselbeziehung“ (19) zwischen der „Tradition der christlichen Offenbarung und den menschlich-gegenwärtigen Erfahrungen“ (20) definiert, dann lässt sich meines Erachtens für die Ebene der Lernenden folgendes festhalten: entweder diese interpretieren ihre je individuellen Erfahrungen zu beliebig großen Teilen bereits durch christliche Traditionsbestände, dann gibt es insofern kein Korrelationsproblem, als solche Korrelation zumindest partiell bereits realisiert ist; oder aber sie interpretieren sich und ihr Leben mit Hilfe anderer „Semantiken“, dann gibt es für die betroffenen Schülerinnen und Schüler ebenso wenig ein Korrelationsproblem, denn die christlichen Traditionsbestände haben schlicht keine Realität für sie, die sie in irgendeiner Weise persönlich betreffen würde. Mir scheint klar zu sein, dass das Korrelationsproblem von den Lernenden selbst überhaupt nur dann als ein *Problem* empfunden wird, wenn es darum geht, in einer bestimmten Lebenssituation aus der Überzeugung heraus, dass hier die christliche Tradition etwas zur Erklärung beitragen kann, aus der Vielfalt dieses Traditionsbestandes das jeweils Geeignete herauszufinden.

Für die Pädagogen wiederum – Lehrkräfte und Wissenschaftler – stellt sich das Korrelationsproblem offenbar mehr im Sinne einer Zielvorgabe: Es geht darum, Schülerinnen und Schülern entweder in Situationen wie der eben beschriebenen zu helfen, oder aber überhaupt darum, deutlich zu machen – beziehungsweise Strategien solcher Verdeutlichung zu entwickeln –, wie die Tradition einer Religion mit den jeweils unterschiedlichen Erfahrungen von Individuen *in Beziehung gebracht* oder „korreliert" werden kann. Die Entwicklung entsprechender Konzepte, Strategien oder allgemeiner Vorstellungen wäre hier das Problem, bei dem abduktives Schließen im hier definierten Sinne eine Rolle spielen kann.

Eine solche pädagogische Strategie scheint mir auch das vorrangige Ziel zu sein, das Hans-Georg Ziebertz, Stefan Heil und Andreas Prokopf in ihren Arbeiten zum Begriff der „abduktiven Korrelation" verfolgen:

> „Im Gegensatz zum bisherigen Korrelationsverständnis werden Erfahrung und Tradition darin nicht als zu verbindende Pole, sondern als ineinander verwobene religiöse Deutungsmuster verstanden. Es geht uns somit um eine Korrelationsdidaktik, die in den Erfahrungen von Lernenden bereits ‚korrelierte' Tradition aufdeckt, um religiöse Kommunikation überhaupt zu ermöglichen. Individuelle religiöse Semantiken stehen damit nicht in einem Widerspruch zu überlieferter Tradition, sondern in lebensweltlich veränderter Kontinuität" (Heil, Prokopf, Ziebertz 2001).

Es ist zu beachten, dass hier nicht davon ausgegangen wird, dass auf seiten der Schülerinnen und Schüler *Probleme* vorliegen, in Bezug auf die erklärende Hypothesen „abduktiv" generiert werden sollen, sondern es geht in erster Linie darum, den Lernenden bewusst zu machen, dass sie in ihrer alltäglichen Redeweise „immer schon" eine Korrelation zwischen ihren individuellen Erfahrungen und Restbeständen religiöser Zeichensysteme vornehmen. Die Rede von „Abduktion" in diesem Zusammenhang wäre damit im Rahmen der Peirceschen Terminologie allein so zu verstehen, wie wir das oben in Bezug auf Wahrnehmungsprozesse ausgeführt haben: Die Subsumtion des Besonderen unter allgemeine Begriffe und Vorstellungen vollzieht sich *unbewusst*, und das Ziel der „Korrelationsdidaktik" besteht darin, durch die Reflexion auf solche unbewussten Abduktionen einen Anknüpfungspunkt für einen an religiöser Bildung orientierten Diskurs zu gewinnen.

Wie in all den genannten Problembereichen mit dem Begriff der Abduktion gearbeitet werden kann, bedarf meines Erachtens noch weiterer Klärung – vor allem auch im Blick auf die Präzisierung derjenigen konkreten Situationen, in Bezug auf die man in unterschiedlicher Weise von „Abduktion“ sprechen kann. Für eine solche Präzisierung könnte an ganz verschiedene Forschungstraditionen angeknüpft werden, die bislang die Bedeutung des Peirceschen Konzeptes der Abduktion hervorgehoben haben. In wissenschaftstheoretischen Zusammenhängen wurde abduktives Schließen zunächst vor allem im Zusammenhang mit der Frage untersucht, ob es eine “Logic of Scientific Discovery” geben kann (vgl. z.B. Hanson 1972 <1965>, Simon 1979, Nickles 1980a und 1980b, Grmek et al. 1981, Jason 1988, Kleiner 1993, Haaparanta 1993, Meheus und Nickles 1999, Magnani et al. 1999, Magnani 2001). Bekannt geworden sind dann auch die Bemühungen, den Begriff der Abduktion für die Erklärung sozialwissenschaftlicher Theoriebildung fruchtbar zu machen (vgl. Kelle 1994). Und im speziellen Bereich von Pädagogik und Didaktik wurde Abduktion erstens als Methode der interpretativen Unterrichtsforschung entwickelt (vgl. Voigt 1984, Beck und Jungwirth 1999, Brandt und Krummheuer 2000), zweitens als eine Methode, welche zur Entwicklung der Lehrerprofessionalität im Blick auf die Wahrnehmung und Aufdeckung religiöser Zeichen und Semantiken in den Äußerungen von Lernenden und deren Neustrukturierung beitragen kann (vgl. Heil, Prokopf und Ziebertz 2001, sowie Heil, Ziebertz und Prokopf 2003), und drittens wurde Abduktion als ein Begriff analysiert, mit dessen Hilfe Lernprozesse auf Seiten von Schülerinnen und Schülern beschrieben werden können (vgl. Hoffmann 1996, 1998; einen kurzen Überblick gibt Voigt 2000).

Bei aller Vielfalt von Anwendungsmöglichkeiten des Konzeptes der Abduktion kann man dennoch als deren gemeinsames Merkmal festhalten, dass es immer darum geht, wahrgenommenes Einzelnes durch etwas Allgemeines zu erklären: Bei der Wahrnehmung subsumieren wir Sinnesreize unter Begriffe, bei der Interpretation von Schüleräußerungen versuchen wir diese durch allgemeine Vorstellungen und Theoriewissen verständlich zu machen und in Lern- und Entdeckungszusammenhängen gehen wir davon aus, dass hier als problematisch empfundene Phänomene durch die hypothetische Annahme „neuer“ Vorstellungen, Konzepte oder Theorien erklärt werden. So gesehen kann man sagen, dass das *Grundproblem* der Abduktionsforschung darin besteht zu klären, auf welche Weise Besonderes und Allgemeines in eine Beziehung der Erklärung des einen durch das andere gebracht werden können. Es fällt auf, dass dieses Problem offenbar genau die gleiche *Struktur* hat wie das Korrelationsproblem. Das könnte bedeuten: Wenn man versucht das Korrelationsproblem durch den Begriff der Abduktion zu „lösen“, stellt sich nur das gleiche Problem von neuem.

Ich möchte im Folgenden zeigen, dass eine Verortung abduktiven Schließens in einen *semiotischen* Kontext das eben genannte Grundproblem unter Umständen handhabbar machen kann. Dabei greife ich auf Überlegungen zurück, die ich andernorts im Rahmen einer semiotisch-pragmatischen Theorie der Erkenntnisentwicklung vorgelegt habe (vgl. Hoffmann 2002, 2001b). Der Grundgedanke ist hier, dass all unser Denken und Kommunizieren immer schon in einer Welt von Zeichen stattfindet – „alles Denken geschieht in Zeichen“, sagt Peirce (PRAG 31 = CP 5.251). Zeichen werden dabei nicht nur als Repräsentationsmittel verstanden, sondern als *Erkenntnismittel*, das heißt sie ermöglichen Erkenntnis, so wie wir eben schon über den Begriff des Stuhles verfügen müssen, um einen Stuhl *als* Stuhl erkennen zu können. Im Rahmen einer semiotischen Erkenntnistheorie wird man sagen können, dass Zeichen die grundlegenden Instrumente unseres Weltverstehens sind. Wir kommunizieren nicht nur notwendig mit Zeichen, sondern sie sind diejenigen Mittel, mit denen wir deuten, was uns begegnet, und mit denen wir Beziehungen zwischen ansonsten Getrenntem herstellen. Insofern ist es auch nicht verwunderlich, dass Schülerinnen und Schüler ihre Lebenswelt auch mit religiösen Semantiken deuten. Als Elemente unserer westeuropäischen Kultur stehen sie genauso zur Verfügung wie zahllose andere tradierte Zeichen und Zeichensysteme.

Um vor diesem Hintergrund die Möglichkeit abduktiven Schließens, die Möglichkeit der Erklärung von besonderen Erfahrungen durch etwas Allgemeines begründen zu können, bietet es sich an, diesen Prozess als den Prozess einer Entwicklung von Repräsentationsmitteln und Darstellungssystemen zu verstehen. Die entscheidende These des semiotischen Ansatzes wäre dann, dass eine solche Entwicklung von Darstellungsmöglichkeiten selbst wesentlich auf das Arbeiten mit Zeichen angewiesen ist, auf die Konstruktion von Darstellungen und das Experimentieren mit diesen. Genau diese Möglichkeit arbeitet Peirce mit seinem Begriff „diagrammatischen Denkens“ oder „Schließens“ (*diagrammatic reasoning*) heraus. Die Möglichkeit kreativen Denkens, die für alle Formen abduktiven Schließens in mehr oder weniger großem Umfang wesentlich ist, und die wir natürlich insbesondere für Lernprozesse voraussetzen müssen, wird hier – grob gesagt – dadurch erklärt, dass implizite Wissensbestände in der konkreten Arbeit an Zeichen sichtbar und bearbeitbar werden.

Peirce hat dieses Konzept diagrammatischen Denkens vor allem in Bezug auf Erkenntnisentwicklung im Bereich der Mathematik entfaltet. In der folgenden Darlegung des Zusammenhanges von Abduktion und diagrammatischem Denken will ich ihm darin mit der Wahl eines Beispiels aus dem Bereich des Mathematiklernens folgen. Und zwar vor allem deshalb, weil gerade am mathematischen Denken deutlich werden kann, dass und wie „alles Denken in Zeichen geschieht“. In Bezug auf die Mathematik ist das am einfachsten zu zeigen. Insofern kann die Diagrammatisierung, die ich als die zentrale Grundlage für *alle* Lernprozesse behaupten würde, hier *paradigmatisch* studiert werden.

4. Diagrammatisches Denken

Versteht man diagrammatisches Denken als Bedingung von Lernprozessen – und von Prozessen der Hypothesenbildung –, dann bedeutet dies für die Praxis, dass Lernen entscheidend davon abhängt, dass erstens *Repräsentationen* von den jeweils gegebenen Problemen konstruiert werden, zweitens *Experimente* mit diesen „Diagrammen" durchgeführt werden und drittens die Resultate solchen Experimentierens beobachtet werden. Lerntheoretisch sind für solche Diagrammatisierung drei Punkte wesentlich: Erstens wird auf diese Weise überhaupt erst *sichtbar*, worum es jeweils geht. So kann auch das eigene Denken und Fühlen zum Gegenstand der Betrachtung werden. Zweitens wird diese Sichtbarkeit notwendig schon unter einer bestimmten *Perspektive* hergestellt, denn jede Konstruktion von Darstellungen ist auf Darstellungsmittel angewiesen – bestimmte Zeichen (Sprache, Bilder, Metaphern, etc.) –, die in ihrer Leistungsfähigkeit immer begrenzt sind. Und drittens – und das ist für das „Experimentieren" mit Diagrammen entscheidend – unterwirft man sich mit der Wahl eines bestimmten Darstellungssystems bestimmten – impliziten oder expliziten – *Regeln* dieses Systems. Besonders deutlich wird dies in Beispielen mathematischer Problemlösung, wo man Gleichungen nicht beliebig umformen darf, etc. Aber auch wenn wir etwas in unserer Alltagssprache darstellen, müssen unsere Darstellungen der Grammatik unserer Sprache gehorchen, und wenn wir begründen und argumentieren muss jede Transformation einer Darstellung bestimmten Rationalitätsstandards genügen, auch wenn diese unter Umständen selbst erst ausgehandelt werden müssen oder sich im Zuge unseres Sprechens nur implizit manifestieren. Ich möchte diesbezüglich allgemein von den *Regeln* eines Darstellungssystems sprechen, deren Zweck es ist zu definieren, was als zulässiges Experiment mit einem Diagramm oder einer Darstellung akzeptiert wird und was nicht.

Was bei solchem diagrammatischen Denken auf Seiten des Lernenden geschieht, ist im Grunde höchst paradox: Gerade wenn wir von einem strengen Regelbegriff ausgehen, wie in der Mathematik, könnte man sagen, dass jede Transformation eines Diagrammes im Grunde immer nur Tautologien erzeugen kann. Wie soll dann aber etwas „Neues" entstehen? Zu dieser Paradoxie ist zweierlei zu sagen: Zunächst definieren solche Regeln ja nur, was erlaubt ist, aber sie sagen nichts darüber aus, welche Transformationen von Diagrammen in einem positiven Sinne „möglich" sind. Wie wir wissen, können wir mit den begrenzten Mitteln unserer Sprache dennoch unendlich viele Sätze bilden. Der entscheidende Punkt wird aber deutlich, wenn wir uns die eigentliche *Funktion* einer Diagrammatisierung des Denkens vor Augen halten: Sie kann darin gesehen werden, dass Probleme, die zunächst als unlösbar erscheinen, Stück für Stück in ihrer für den Lernenden als komplex erscheinenden Struktur herausgearbeitet werden. Man kann das als Aufforderung an Schülerinnen und Schüler folgendermaßen formulieren: Stelle erst mal dar, was Du von dem Problem verstanden hast, und dann sehen wir weiter.

Der eigentliche Clou diagrammatischer Darstellungen ist eine Eigenschaft, die für Diagramme als *ikonischen* Zeichen charakteristisch ist. Ein „Ikon“ ist nach Peirce dadurch definiert, dass es *Relationen* darstellt und hinsichtlich seiner relationalen Struktur dem Dargestellten „ähnlich“ ist (vgl. Hoffmann 2001a). Ein Diagramm wiederum ist ein Zeichen, das Relationen mit den Mitteln eines konsistenten Darstellungssystems repräsentiert. Insofern ist auch jeder Satz, der in einer Sprache formuliert wird, ein Diagramm. Eine wesentliche Eigenschaft aller ikonischen Zeichen aber ist, dass sie *Assoziationen* erlauben, dass sie bestimmte andere ikonisch darstellbare Ideen hervorrufen. Wenn also bei der Lösung eines zunächst unlösbar erscheinenden Problems erst einmal *irgendeine* diagrammatische Darstellung gefunden ist, dann bietet diese immer auch weiter gehende Transformationsmöglichkeiten an, die das Problem zunehmend handhabbarer machen.

5. Ein Beispiel: Reiskörner

Bevor ich das lange theoretisch erörtere, möchte ich ein Beispiel aus dem Bereich der Mathematik geben, wo das Wesen diagrammatischen Schließens am leichtesten deutlich zu machen ist. Mein Beispiel ist die schöne und bekannte Geschichte eines Bauern, der sich – scheinbar in aller Bescheidenheit – von seinem König als Lohn erbittet, er möge ihm doch auf ein Schachbrett in das erste Feld nur ein Reiskorn legen, in das zweite Feld dann zwei, in das dritte vier und in jedes weitere Feld dann wiederum jeweils die doppelte Menge an Reiskörnern wie sie das Feld vorher aufwies. Weitsicht unter Politikern war offenbar schon für den Erfinder dieser Geschichte eher eine Seltenheit, jedenfalls stimmt der König sofort zu und hat sich damit – wie leicht zu sehen ist – vollständig ruiniert. Auf wie viele Reiskörner darf der Bauer Anspruch erheben?

Nun gut, drei Felder habe ich schon mal vorgerechnet – im dritten Feld liegen vier Reiskörner, die Summe der ersten drei Felder ist also sieben –, und der geneigte Leser sei nun herzlich eingeladen, die restlichen 61 Felder zu addieren. Schon bald wird sich herausstellen, dass man sich da auf ein mühsames Geschäft eingelassen hat, so dass man versuchen wird, eine *Darstellung* des Problems zu finden, die ein wenig handlicher aussieht als eine Reihe von Zahlen, deren letzte immerhin 19 Ziffern hat (wie ich schon mal verraten kann). Sehen wir uns zunächst die Folge von Feldern an. Sie lässt sich, da die Menge von Reiskörnern jeweils verdoppelt wird, als die Folge der Potenzen von 2 darstellen:

1. Feld	2^0
2. Feld	2^1
3. Feld	2^2
4. Feld	2^3
5. Feld	2^4
...	....
64. Feld	2^{63}

Auf diese Weise wüsste man schon einmal, wie viele Körner auf jedem einzelnen Feld liegen. Das einzige, was dafür zu tun war, war eine Transformation der *Darstellung* vorzunehmen: Anstatt Dezimalzahlen hinzuschreiben, die man erst mühsam errechnen müsste, werden die Zahlen einfach als Potenzen von 2 repräsentiert. Wir wollen aber wissen, welches die Summe all dieser Potenzen ist. Um das herauszufinden, wäre es praktisch zu wissen, wie sich die Summen von jedem Feld zum nächsten entwickeln. Wir ergänzen also unsere Tabelle folgendermaßen, wobei die in der dritten Spalte stehenden Zahlen die Summen aller bisher gelegten Reiskörner bezeichnen – einschließlich des Feldes, um das es jeweils geht:

1. Feld	$2^0 = 1$	1
2. Feld	$2^1 = 2$	3
3. Feld	$2^2 = 4$	7
4. Feld	$2^3 = 8$	15
5. Feld	$2^4 = 16$	31
...	....	...
64. Feld	$2^{63} =$	?

Das sind natürlich nur die ersten Summen, aber wenn man diese Reihe so vor sich sieht, bietet es sich wiederum an – und das wäre eine Form von „Assoziation“, wie sie oben als Wesensmerkmal ikonischer Darstellung hervorgehoben worden war – eine bessere Darstellung der Summenentwicklung zu finden. Gibt es eine „Gesetzmäßigkeit“, durch welche sich der Fortgang der Summenbildung beschreiben lässt? An dieser Stelle muss man ein wenig herumexperimentieren, verschiedene Transformationen der Summenfolge ausprobieren, und so könnte man schließlich darauf kommen, dass die einschließlich eines bestimmten Feldes gelegte Gesamtsumme x durch folgenden Algorithmus bestimmt werden kann:

(1) $\quad x = 2y + 1$,

wobei y die bis zum vorangehenden Feld gewonnene Gesamtsumme ist (also z.B.: $7 = 2 \cdot 3 + 1$; $15 = 2 \cdot 7 + 1$, usw.; ich stelle das hier mit den Mitteln dar, wie sie etwa in der 7. Klasse Gymnasium zur Verfügung stehen, und verzichte deshalb auf die in der Mathematik übliche Darstellung von Summen). Das ist zwar nun eine schöne Formel, aber sie ist dennoch ziemlich unpraktisch, weil man ja zu ihrer Anwendung immer schon *y*, die Gesamtsumme bis zum Feld vorher kennen muss. Das heißt aber, dass wir immer noch gezwungen wären, die Summen Feld für Feld zu addieren.

Doch was sich auf diese Weise zunächst als eine Sackgasse unserer Experimente mit Darstellungen zu offenbaren scheint, entpuppt sich – wenn man dieses Resultat nur einmal genauer „beobachtet", um mit Peirce zu sprechen – als außerordentlich nützlich: Denn wenn man wiederum mit dieser Formel ein wenig herumexperimentiert – immer im Blick darauf, dass es am schönsten wäre, eine Formel zu haben, die für jedes Feld sofort die bis dahin zu addierende Gesamtsumme darstellt –, dann könnte man, wenn man die Summenentwicklung mit den Reiskörnerzahlen auf den ersten Feldern unserer Tabelle vergleicht, unter Umständen auf folgende Formel kommen:

(2) $x = 2z - 1$,

wobei *z* diejenige Menge von Reiskörnern ist, die auf dem Feld liegt, einschließlich dessen die Gesamtsumme bestimmt werden soll. Also: Wollen wir die Gesamtsumme bis einschließlich des vierten Feldes berechnen, dann führt die Anwendung dieses neuen Algorithmus' zu folgender Darstellung: $x = 2 \cdot 2^3 - 1 = 15$. Beim fünften Feld kommen wir zu $x = 2 \cdot 2^4 - 1 = 31$ und beim 64. Feld schließlich zu der schlichten Form $x = 2 \cdot 2^{63} - 1$.

Inzwischen hätten wir jedoch auch folgendes sehen können: Die Multiplikation von *z* mit 2 ist eigentlich überflüssig, weil ja jede Multiplikation mit 2 als Potenz von 2 dargestellt werden kann. Man könnte also stattdessen von der Gesamtsumme der Reiskörner bis einschließlich des jeweils *nächsten* Feldes ausgehen, die ich *u* nennen will, und somit schreiben:

(3) $x = u - 1$.

Für die Gesamtmenge an Reis auf dem Schachbrett würde dies bedeuten, dass sie ganz einfach in der Form $2^{64} - 1$ dargestellt werden kann. Diese Darstellung dürfte aus ästhetischen Gründen am meisten überzeugen, mehr jedenfalls als die Ziffernfolge 18446744073709551615 oder – in Worten:

Achtzehntrillionenvierhundertsechsundvierzigbilliardensiebenhundertvierundvierzigbillionendreiundsiebzigmilliardensiebenhundertneunmillionenfünfhunderteinundfünfzigtausendsechshundertundfünfzehn.

Man sieht auf diese Weise zweierlei: Zum einen haben wir offenbar im Prinzip jeweils unendlich viele Möglichkeiten, Darstellungen oder Diagramme zu transformieren, und zum anderen hängt die Bestimmung dessen, was als eine hilfreiche und „angemessene" Transformation gelten kann, von Dingen ab, die mit dem Darstellungssystem nichts zu tun haben: von unseren Interessen, von Zweckmäßigkeitserwägungen und von ästhetischen Einflüssen. Auf jeden Fall scheint klar zu sein, dass wir *ohne* solches diagrammatisches Denken kaum eine Möglichkeit haben, komplexere Probleme zu lösen.

6. Abduktion und diagrammatisches Denken

Wenn wir genauer verstehen wollen, was bei dem geschilderten kreativen Problemlösungsprozess eigentlich passiert, können wir direkt an die im zweiten Abschnitt dargestellten Überlegungen zum Zusammenspiel von Abduktion, Deduktion und Induktion anknüpfen, wie sie der späte Peirce entwickelt hat. Abduktion, so hatten wir gesehen, ist hier der erste Schritt, bei dem in der „Untersuchung einer Masse von Fakten" nach einer Hypothese gesucht wird, welche diese Fakten erklären oder auch nur sinnvoll beschreiben kann. Deduktion soll dann im Blick auf mögliche experimentelle Situationen aus dieser Hypothese notwendige Konsequenzen ableiten, die dann „induktiv" getestet werden können.

Das so von Peirce beschriebene Zusammenspiel von Abduktion, Deduktion und Induktion lässt sich in vielfacher Weise auf die Analyse unseres Beispiels anwenden. Schon im ersten Schritt, wenn es darum geht, eine übersichtlichere Darstellung der Reismenge auf jedem einzelnen Feld zu finden, wird die Folge der Potenzen von 2 als die zweckmäßigste Repräsentation „abduziert". Man könnte sich auch eine beliebige Menge anderer Repräsentationen dieser „Masse von Fakten" vorstellen; es besteht keinerlei Notwendigkeit für gerade diese Darstellung, aber sie ist zweckmäßig, weil sie uns zum Beispiel erlaubt, *deduktiv* zu schließen, dass auf dem 64. Feld 2^{63} Reiskörner liegen. Wer hätte das schon vorher gewusst?

Um das Gewinnen „neuer Ideen" geht es auch an der Stelle, wo wir uns fragen, mit welchem Algorithmus wir die Entwicklung der Gesamtsummen darstellen können: Wie kommt man zu der Formel

(1) $x = 2y + 1$?

Diese Formel, diese „neue Idee" ist schlicht *erraten*, aber die auf diese Weise abduktiv gebildete Hypothese ist nicht einfach vom Himmel gefallen: Es ist in erster Linie eine Frage der Beobachtung, dass man in der diagrammatischen Darstellung, die wir in der zweiten Tabelle oben gewählt haben, gleichsam „hinter" der Zahlenfolge in der dritten Spalte oder „durch sie hindurch" *sieht*, dass eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit die Folge der Zahlen 1, 3, 7, 15, 31 determiniert. Man fragt sich, wie man von der 1 zur 3 kommt, man sieht sofort, dass die Regel keine Addition sein kann, da die Abstände zwischen den Zahlen immer größer werden, man probiert also verschiedene Multiplikationen aus, sieht schnell, dass die Multiplikation mit 2 eine wichtige Rolle spielen könnte ($2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 7 = 14$), und sieht dann, dass die Multiplikation mit 2 verbunden mit einer Addition von 1 jeweils von einer Zahl zur nächsten dieser Folge führt.

Hat man diese, in der obigen Formel dargestellte Gesetzmäßigkeit erst einmal vermutet, dann wird man deduktiv aus dieser Vermutung schließen können, dass ihre Anwendung auf jedes *n*-te Feld die in der dritten Spalte dieses Feldes stehende Zahl erzeugen wird, und genau diese Implikation der Vermutung wird man dann *induktiv* ausprobieren, indem man die Rechnung für verschiedene *n* durchführt: Für $n = 2$ ergibt sich $2 \cdot 1 + 1 = 3$, für $n = 3$ ergibt sich $2 \cdot 3 + 1 = 7$, für $n = 4$ heißt es $2 \cdot 7 + 1 = 13$, usw.

Die entscheidende Bedingung der Möglichkeit, hier etwas „durch die Zahlen hindurch zu sehen" – und das geht über unsere oben durchgeführte Untersuchung des Peirceschen Abduktionsbegriffes hinaus – besteht darin, dass diese Zahlen in dieser oder einer ähnlichen Formen erst einmal *dargestellt* werden müssen, es muss ein Diagramm konstruiert werden – hier unsere Tabellen –, welches das Problem repräsentiert. Denn erst im Diagramm wird die *Relation* zwischen den Reiskörnerzahlen auf den einzelnen Feldern, welche für die Bestimmung der Summenentwicklung der Reiskörner wesentlich ist, sichtbar und zum *Gegenstand* einer Betrachtung gemacht. Man könnte sagen, dass die Zahlenfolge 1, 3, 7, 15, 31 in der dritten Spalte unserer zweiten Tabelle diese Relation zunächst nur ikonisch in einem nicht-diagrammatischen Sinn sichtbar macht, da wir noch nicht die *Regel* kennen, welche die notwendige Folge dieser Zahlen determiniert. Erst wenn wir „durch die Zahlenfolge hindurch sehen" oder abduktiv erraten, dass diese Folge durch die in (1) formulierte Regel determiniert ist, sehen wir die Zahlenfolge als ein Diagramm.

Die Kunst besteht zunächst einmal darin, geeignete Repräsentationen zu finden oder Probleme in geeignete Repräsentationen zu transformieren. Dabei spielen Zufälligkeiten eine Rolle, wie man sehen kann, wenn man sich einmal vergegenwärtigt, wie wir von der in (1) genannten Formel zu derjenigen gekommen sind, die dann schon eine einfache Lösungsmöglichkeit darstellt, nämlich zu:

(2) $x = 2z - 1$.

Stellen wir uns vor, wir hätten die zweite Tabelle oben so aus der ersten entwickelt, dass wir es dabei belassen hätten, einfach in einer dritten Spalte die Summenentwicklung darzustellen, ohne noch zusätzlich in der zweiten Spalte die Potenzen von 2 auch als natürliche Zahlen darzustellen (also: $2^0 = 1$; $2^1 = 2$; $2^2 = 4$; etc.). Diese „doppelte" oder „pleonastische" Darstellung der Reiskörnerzahlen auf jedem einzelnen Feld scheint schlicht überflüssig zu sein, sie trägt keinerlei neue Information bei, sie ist rein tautologisch. Aber sie ist doch entscheidend, wenn man plausibel machen will, wie man die Formel (2) finden kann: Man „sieht schlechter", dass das Doppelte von 2^4 gleich 32 ist – was schon ziemlich nahe an der zu erreichenden 31 ist –, als dass man „sieht", dass das Doppelte von *16* gleich 32 ist.

Es ist wie gesagt eine Tautologie, dass 2^4 gleich 16 ist, aber wir als Menschen mit notwendig beschränkten Geisteskräften haben doch ganz andere *Gewohnheiten*, mit den Zahlen 2, 4, 8, 16 umzugehen als mit 2^1, 2^2, 2^3 und 2^4. Und genau darauf kommt es hier offenbar an. Das Spiel mit Darstellungen und deren tautologische Umformung ist wesentlich, um diejenigen Assoziationen zu ermöglichen, die wir brauchen, um Ideen und Vermutungen für Lösungsmöglichkeiten abduktiv erschließen zu können.

7. Schluss

Der Begriff der Abduktion, so würde ich zusammenfassend sagen, ist vor allem deshalb bedeutsam, weil mit ihm all diejenigen Prozesse beschrieben werden können, bei denen es darum geht, besondere Erfahrungen durch etwas Allgemeines zu erklären. Mit abduktiven Schlüssen haben wir es bei der Wahrnehmung, bei der Deutung unserer Lebenswelt, bei der Interpretation von Äußerungen und bei den für Lernen wesentlichen Prozessen der Bildung erklärender Hypothesen zu tun. Aber wenn man genauer verstehen will, *auf welche Weise* solche Hypothesenbildung möglich ist, sollte man dieses Konzept semiotisch vertiefen. Eine Reflexion auf den praktischen Umgang mit Zeichen und Repräsentationen, so hoffe ich gezeigt zu haben, spielt dabei eine wesentliche Rolle.

Was Peirce zum Zusammenspiel von Abduktion, Deduktion und Induktion in Bezug auf Forschungsprozesse entfaltet hat, lässt sich – vermittelt durch den Begriff des diagrammatischen Denkens – auch zur Grundlage einer allgemeinen Theorie des Lernens machen. Im Rahmen diagrammatischen Denkens haben Abduktion, Deduktion und Induktion eine ganz bestimmte Rolle: Abduktion ist entscheidend, um zunächst einmal eine Darstellung für ein bestimmtes Problem zu finden, also um ein Diagramm zu konstruieren und um geeignete Repräsentationsmittel zu finden, Deduktion ist notwendig, um nach den Regeln von Darstellungssystemen bestimmte Umformungen solcher Diagramme vornehmen zu können, und durch Induktion lässt sich prüfen, ob die hypothetisch formulierten Repräsentationen etwas zur Lösung des Problems taugen oder nicht. Es ist ein solches – erkenntnistheoretisch zu reflektierendes – „Spiel" mit Repräsentationen, das Lernen erst möglich macht.

Solche Diagrammatisierung scheint mir aber nicht nur für Lernen wesentlich zu sein, sondern überhaupt für jede Interpretation und Deutung unserer Lebenswelt. Wenn es richtig ist, dass wir nur durch Zeichen denken und erkennen können, dann sollte es ein wesentliches Ziel von Schule sein, solche semiotische Praxis zu üben. Meines Erachtens zeigt sich hier ein bislang verhängnisvoll unterschätztes Problem: Es ist beileibe keine Selbstverständlichkeit, überhaupt erst einmal eine *Sprache* zu finden, in der Probleme formuliert werden können, also Zeichen und Repräsentationen, mit denen man sich verständigen kann, und an denen man auch etwas über sich selbst lernen kann. Wenn man sich die drastisch zunehmende Gewalt an den Schulen vor Augen hält, könnte man auch vermuten, dass hier ein

Problem der Verständigung zu Grunde liegt. Lehrerinnen und Lehrer beklagen, dass sie an manche Schüler überhaupt nicht mehr „herankommen“, und das mag auch daran liegen, dass diese nur begrenzte Mittel zur Verfügung haben, ihre auch existentiellen Nöte in einer angemessenen und Nutzen bringenden Weise zum Ausdruck zu bringen.

Der Umgang mit Zeichen und Darstellungen ist so grundlegend für die Möglichkeiten unseres Denkens wie auch unseres Handelns, dass man leicht übersehen kann, dass es sich auch hier um eine Fähigkeit handelt, die *gelernt* werden muss. An kleineren Kindern kann man sehen, welche Mühe das oftmals macht. Die Leistung des Peirceschen Konzeptes diagrammatischen Denkens liegt gerade darin, dass es hierzu ein Instrument bereit stellt. In Diagrammatisierung geht es immer darum, Zeichen zu finden, an denen und mit denen man weiter denken und arbeiten kann. Wie das praktisch geschehen kann, habe ich hier versucht an einem mathematischen Beispiel deutlich zu machen. Für den Religionsunterricht, der vielleicht noch am ehesten auch existentiell bedeutsame Erfahrungen von Schülerinnen und Schülern zum Gegenstand machen kann, möchte ich auf die Interviews und Unterrichtseinheiten zum Begriff des „Kreuzes“ verweisen, die Prokopf, Heil und Ziebertz (2003) sowie Hilger (2003) auf ganz unterschiedliche Weise beschreiben. Meines Erachtens passiert hier genau das, was Peirce mit seinem Begriff diagrammatischen Denkens erreichen will: Ein Zeichen, das Wort „Kreuz“, wird zum Gegenstand einer Betrachtung gemacht, und es wird deutlich, dass ein Verständnis dessen, was als *Wort* zwar bekannt sein mag, sich erst entwickelt, wenn die Lernenden selbst gezwungen sind, nach Worten und Deutungen zu suchen und diese im Gespräch auszuprobieren. Dabei geht es nicht nur um einzelne Zeichen, sondern es geht darum, sich in den zu deren Verständnis notwendigen *Zeichensystemen* zu bewegen und deren „Grammatik“ zu lernen. Wir können unsere Welt und unsere Erfahrungen nur verstehen – und wir können nur sinnvoll handeln –, wenn wir gelernt haben mit Zeichen umzugehen.

Literatur

Beck C. und H. Jungwirth (1999), Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 20(4): 231–259.

Brandt B. und G. Krummheuer (2000), Das Prinzip der Komparation im Rahmen der Interpretativen Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik. In *Journal für Mathematikdidaktik* 21(3/4): 193–226.

Fann K. T. (1970), *Peirce's Theory of Abduction*. The Hague: Nijhoff.

Goodman N. (1983 <1954>), *Fact, Fiction, and Forecast*. 4. ed. Cambridge MA, London: Harvard University Press.

Grmek M. D., R. S. Cohen und G. Cimino (Hrsg.), 1981, *On Scientific Discovery: The Erice Lectures 1977* (Boston Studies in the Philosophy of Science 34), Dordrecht et al.: Reidel.

Haaparanta L. (1993), Peirce and the Logic of Logical Discovery. In *Charles S. Peirce and the Philosophy of Science. Papers from the Harvard Sesquicentennial Congress*. Hrsg. von Edward C. Moore. Tuscaloosa and London: The University of Alabama Press: 105–118.

Hanson N. R. (1972 <1965>), *Patterns of Discovery: An Inquiry into the Conceptual Foundations of Science*. Cambridge: Univ. Press.

Heil S., A. Prokopf und H.-G. Ziebertz (2001), Schülerorientierung und korrelative Professionalität. Konsequenzen einer abduktiven Korrelationsdidaktik. In *Tradition – Korrelation – Innovation. Trends der Religionsdidaktik in Vergangenheit und Gegenwart*. Hrsg. von H. Mendl und M. Schiefer-Ferrari. Donauwörth: 162-174.

Heil, S., H.-G. Ziebertz und A. Prokopf (2003), Abduktives Schließen im professionellen Religionslehrerhandeln. Zur empirisch-theologischen Erforschung religionspädagogischer Professionalität. In *Abduktive Korrelation. Religionspädagogische Konzeption, Methodologie und Professionalität im interdisziplinären Dialog*. Hrsg. von H.-G. Ziebertz, S. Heil und A. Prokopf. Münster: 187-204.

Hilger, G. (2003), Abduktive Korrelation und religionspädagogische Professionalisierung in der universitären Lehrerbildung. In *Abduktive Korrelation. Religionspädagogische Konzeption, Methodologie und Professionalität im interdisziplinären Dialog*, hrsg. von H.-G. Ziebertz, S. Heil und A. Prokopf, Münster, 227-240.

Hoffmann M.H.G. (1996), *Eine semiotische Modellierung von Lernprozessen. Peirce und das Wechselverhältnis von Abduktion und Vergegenständlichung*. Occasional Paper 160, November 1996: Arbeiten aus dem Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld (Online: http://www.uni-bielefeld.de/idm/publikationen/occpaper/occ160/occ160.htm)

Hoffmann M.H.G. (1998), Erkenntnistheoretische Grundlagen des Lernens: Lernen als Verallgemeinerung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2.-6. März 1998 in München*. Hrsg. von M. Neubrand. Hildesheim: Franzbecker: 311–314; erweiterte Fassung online: http://www.uni-bielefeld.de/idm/personen/mhoffman/papers/GDM.html .

Hoffmann M.H.G. (1999), Problems with Peirce's Concept of Abduction. In *Foundations of Science* 4(3): 271–305.

Hoffmann M.H.G. (2000), Die Paradoxie des Lernens und ein semiotischer Ansatz zu ihrer Auflösung. In *Zeitschrift für Semiotik* 22(1): 31–50.

Hoffmann M.H.G. (2001a), Peirces Zeichenbegriff: seine Funktionen, seine phänomenologische Grundlegung und seine Differenzierung: Online: http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Peirces_Zeichen.html .

Hoffmann M.H.G. (2001b), Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 22(3/4): 231-251.

Hoffmann M.H.G. (2002), *Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz*. Dresden: Philosophische Fakultät der Technischen Universität (Habilitationsschrift).

Hoffmann, M.H.G. (2002), Das Problem der Erkenntnisentwicklung und Peirces semiotisch-pragmatischer Lösungsansatz. In *Allgemeine Zeitschrift für Philosophie* 27(3): im Druck.

Jason G. (1988), *The Logic of Scientific Discovery*. New York: P. Lang.

Kelle U. (1994), *Empirisch begründete Theoriebildung: Zur Logik und Methodologie interpretativer Sozialforschung* (Status passages and the life course 6). Weinheim: Dt. Studien-Verl.

Kleiner S. A. (1993), *The Logic of Discovery: A Theory of the Rationality of Scientific Research* (Synthese Library 231). Dordrecht et al.: Kluwer.

Magnani L., N. J. Nersessian und P. Thagard (Hrsg.), 1999. *Model-based Reasoning in Scientific Discovery*. New York: Plenum Publishers.

Magnani L. (2001), *Abduction, Reason, and Science. Processes of Discovery and Explanation*. New York: Kluwer Academic / Plenum Publishers.

Meheus J. und T. Nickles (Hrsg.), 1999. *Discovery and Creativity*. Special issues of *Foundations of Science* 4(3) und 4(4).

Nickles T. (Hrsg.), 1980a. *Scientific Discovery, Logic and Rationality* (Boston Studies in the Philosophy of Science 56). Dordrecht: Reidel.

Nickles T. (1980b), Scientific Discovery: Case Studies. In *Boston Studies in the Philosophy of Science 60*. Dordrecht: Reidel: 1–62.

Peirce (CP). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Bde. I-VI hrsg. von Ch. Hartshorne und P. Weiss, 1931-1935, Bde. VII-VIII hrsg. von A. W. Burks, 1958; zitiert nach Band und Paragraphen). Cambridge, Mass.: Harvard UP.

Peirce (HLP), *Pragmatism as a Principle and Method of Right Thinking, by Charles Sanders Peirce* (The 1903 Harvard Lectures on Pragmatism. Edited and Introduced, with a Commentary by P. A. Turrisi). Albany, NY, 1997: State University of New York Press.

Peirce (L). *Letter* (nummeriert nach R. S. Robin, Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce. Worcester, Mass., 1967: The University of Massachusetts Press). Verfügbar in der Peirce Microfilm Edition. Seitenzählung: CSP = Peirce / ISP = Institute for Studies in Pragmaticism.

Peirce (PRAG), *Charles S. Peirce, Schriften zum Pragmatismus und Pragmatizismus*. 2. ed. (hrsg. von K.-O. Apel). Übersetzt von G. Wartenberg. Frankfurt a.M. 1991: Suhrkamp.

Peirce (VP), *Charles Sanders Peirce, Vorlesungen über Pragmatismus* (mit Einl. und Anm. neu hrsg. von E. Walther). Hamburg 1991 <1973>: Meiner.

Prokopf A. und H.-G. Ziebertz (2000), Abduktive Korrelation – Eine Neuorientierung für die Korrelationsdidaktik? In *Religionspädagogische Beiträge* 44: 19-50.

Prokopf, A., S. Heil und H.-G. Ziebertz (2003), Abduktives Schließen im qualitativen Auswertungsverfahren. Ein religionspädagogisch-empirisches Modell. In *Abduktive Korrelation. Religionspädagogische Konzeption, Methodologie und Professionalität im interdisziplinären Dialog*, hrsg. von H.-G. Ziebertz, S. Heil und A. Prokopf, Münster, 89-108.

Richter A. (1995), *Der Begriff der Abduktion bei Charles Sanders Peirce*. Frankfurt am Main et al.: Lang.

Santaella L. (2000), The Development of Peirce's Three Types of Reasoning: Abduction, Deduction and Induction. In *Ensayos Semióticos. Dominios, modelos y miradas desde el cruce de la naturaleza y la cultura*. Hrsg. von A. Gimate-Welsh. Mexico City: Grupo Editorial Miguel Angel Porrúa / Editorial Universidad Autónoma de Puebla / Asociación Mexicana de Estudios Semióticos: 677-684.

Simon H. A. (Hrsg.), 1979. *Models of Discovery and Other Topics in the Methods of Science* (Boston Studies in the Philosophy of Science 54). Dordrecht: Reidel.

Voigt J. (1984), *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen*. Weinheim: Beltz.

Voigt J. (2000), Abduktion. In *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam*. Hrsg. von M. Neubrand. Hildesheim: Franzbecker: 694–697.